

Begrenzung der Lokalisierbarkeit von Wechselwirkungen in der Quantentheorie der Elementarteilchen und Felder

Von HERMANN L. JORDAN *

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforsch. 8a, 341–352 [1953]; eingegangen am 11. März 1953)

Die vorliegenden Untersuchungen sollen zeigen, daß die Annahme einer die Grenze der Lokalisierbarkeit von Wechselwirkungen angehenden „kleinsten Länge l_0 “ eine konsistente und konvergente Quantentheorie ermöglicht.

Durch mathematische Invarianzüberlegungen läßt sich eine Funktionaltransformation G nach dem Gesichtspunkt größtmöglicher Einfachheit bestimmen, durch die in die übliche Theorie eine Begrenzung der Lokalisierbarkeit eingeführt wird. Die gleiche Transformation wird aus der Heisenbergschen Unschärferelation erhalten, wenn man die Zustände minimaler Unschärfe aufsucht.

Es wird ferner gezeigt, daß sich ohne Spezialisierung der Transformation G eine Feldtheorie angeben läßt, die sich in das übliche Schema der Quantentheorie der Wellenfelder einordnet. Das vorgeschlagene Verfahren unterscheidet sich in der Methode, wie der Interpretation von den bekannten Regularisierungsverfahren.

Die Brauchbarkeit der Ansätze läßt sich erst in der Mesonentheorie überprüfen. Dies soll in der Folge untersucht werden.

In den letzten Jahren wurde, insbes. durch die Arbeiten von Schwinger^{1–3}, Feynman^{4–6} und Dyson^{7–10}, ein wesentlicher Fortschritt in der Quantentheorie der Wellenfelder erzielt. Insbesondere konnten die Schwierigkeiten, die der Quantentheorie älterer Fassung durch das spezielle Relativitätsprinzip entstanden, gedanklich überwunden werden. Trotz der weiterhin auftretenden Divergenzen gelang der Anschluß an experimentelle Daten (z. B. Lamb-Shift) mittels der sog. „Renormalisierung“ von Ladung, Masse und anderen Koppelungsparametern. Die Divergenzen selbst lassen sich formal durch relativistisch invariante Abschneidemethoden beseitigen, wie dies in einer großen Zahl von Arbeiten gezeigt wurde (insbes. Bopp¹¹, Feynman^{4–5}, Pauli und Villars¹²). Die zuletzt genannte Arbeit von Pauli und Villars behandelt diese sog. Regularisierung in voller Allgemeinheit.

So überzeugend diese Theorien im einzelnen auch sind, so wenig befriedigend ist das durch sie ver-

mittelte Bild in seiner Gesamtheit: Guter Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in der Quantenelektrodynamik stehen unzulängliche Ergebnisse in der Mesonentheorie gegenüber. Erst diese kann jedoch Prüfstein für die Theorie sein, da in der Quantenelektrodynamik bei Verwendung der Renormalisierung experimentell prüfbare Aussagen durch Regularisierung und andere Abänderungen der Theorie nicht wesentlich beeinflusst werden. Das Auftreten divergenter Terme deutet auf unzulängliche mathematische Grundlagen hin, die Interpretation dieser Ausdrücke durch Renormalisierung kann nur ein vorläufiger Ausweg sein. Andererseits verändert die Regularisierung die Feldgleichungen (siehe^{13, 14}) und damit das physikalische Konzept in grundlegender (und nicht widerspruchsfreier) Weise.

Bevor es möglich sein wird, eine in sich widerspruchsfreie Quantentheorie des Kontinuums zu formulieren, müssen zunächst die Fragen gelöst werden, die durch die Verwendung der Vorstellung

* H. L. Jordan, Dissertation (gekürzt u. teilweise ergänzt) München 1951, vorgetragen auf der Jahrestagung des Verbandes der deutschen physikalischen Gesellschaften in Karlsruhe 1951; jetzt: Institut für theoretische Physik der Techn. Hochschule Aachen, Templergraben 55.

^{1–3} J. Schwinger, Physic. Rev. **74**, 1439 [1948]; **75**, 651 [1949]; **76**, 790 [1949].

⁴ R. P. Feynman, Physic. Rev. **74**, 1430 [1948].

⁵ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 769 [1949].

⁶ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 749 [1949].

⁷ F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 486 [1949].

⁸ F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 1736 [1949].

⁹ F. J. Dyson, Physic. Rev. **82**, 428 [1951]; **83**, 608 [1951].

¹⁰ F. J. Dyson, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A, **207**, 395 [1951].

¹¹ F. Bopp, Ann. Physik **38**, 345 [1940]; **42**, 573 [1943].

¹² W. Pauli u. F. Villars, Rev. Mod. Physics **21**, 434, [1949].

¹³ H. Lehmann, Ann. Physik (6) **8**, 109 [1950].

¹⁴ H. Steinwedel, Z. Naturforschg. **6a**, 123 [1951].



„punktförmiger“ Elementarteilchen einerseits und durch die Verwendung „singulärer“ Funktionen andererseits die wesentlichen Schwierigkeiten in die Theorie brachten.

Punktförmigkeit der Teilchen und das Auftreten singulärer Funktionen sind eng miteinander verbunden. Es liegt daher nahe, wie dies durch die Regularisierung erreicht wird, die Lösung des Problems in einem Ersatz der singulären Funktionen durch reguläre zu suchen.

Hier pflegen jedoch allerlei Unstimmigkeiten aufzutreten, die im einzelnen in den genannten Arbeiten diskutiert sind. Insbes. scheint sich das Kausalitätsprinzip schwer mit dem Verzicht auf singuläre Funktionen vereinbaren zu lassen.

Da inzwischen durch die Veröffentlichungen von Schwartz über eine „Theorie der Distributionen“¹⁵ die singulären Funktionen (= Distributionen) ein Bestandteil der exakten Mathematik geworden sind und ihre Verwendung in allgemeingültige und in ihrem Anwendungsbereich abgegrenzte Regeln gefaßt wurde, so kann man nunmehr versuchen, die physikalischen Grundlagen so zu formulieren, daß bei der Verwendung singulärer Funktionen keine Schwierigkeiten auftreten. Dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ohne daß dabei im einzelnen auf den Kalkül von Schwartz eingegangen werden soll.

Nach Schwartz ist eine Distribution als linearer, singulärer Integraloperator auf einen durch Verhalten im Unendlichen, Differenzierbarkeits- und Konvergenzeigenschaften gekennzeichneten „Raum“ von Funktionen anwendbar und durch die „Topologie“ dieses Funktionenraumes definiert. Es lassen sich Differentiation und Integration, Faltungsprodukt, Fourier- und Laplace-Transformation auf Distributionen übertragen, wobei sich wesentliche Vereinfachungen ergeben. Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar und Grenzübergänge sind vertauschbar. Eine grundlegende Schwierigkeit liegt in der Definition des gewöhnlichen Produktes. Während das Produkt einer Distribution mit einer im gewöhnlichen Sinne unbeschränkt differenzierbaren Funktion stets definiert ist, kann man dem gewöhnlichen Produkt zwischen Distributionen i. a. keinen Sinn beilegen. So ist zum Beispiel das Quadrat der Diracschen δ -Funktion ein sinnloser Ausdruck.

Im Rahmen der üblichen Störungstheorie in der Quantentheorie der Wellenfelder ist es jedoch nicht

vermeidbar, daß Produkte von singulären Funktionen auftreten und man kann leicht zeigen, daß die bekannten Divergenzen von der Nichtdefiniertheit dieser Produkte herrühren. In der Schwingerischen Quantenelektrodynamik wird z. B. die Vakuumpolarisation durch einen Tensor $K_{\mu\nu}(x)$ beschrieben, der ein solches Produkt enthält: (Schwinger^{2,3}):

$$K_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \Delta}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \Delta}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\lambda} + \kappa_0^2 \Delta \Delta^{(1)} \right), \quad (1)$$

in gleicher Weise die Selbstenergie des Elektrons durch

$$\delta m c^2 \psi(x) = e^2 \int \left\{ \gamma_\lambda \left[\bar{D}(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \Delta^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \bar{\Delta}(x-x') \right] + 2 \kappa_0 [\bar{D}(x-x') \cdot \Delta^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \bar{\Delta}(x-x')] \right\} \psi(x') d^4 x'. \quad (2)$$

Ähnliches tritt in der Mesonentheorie auf. Da eine physikalische Theorie letzten Endes mathematisch definiert sein muß, so haben wir die Wahl, entweder auf singuläre Funktionen zu verzichten, oder die Theorie so zu formulieren, daß Produkte zwischen Distributionen nicht auftreten können. Das letztere soll im folgenden versucht werden.

Bezeichnungsweise: Die Ortskoordinaten werden mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_0 = ct)$ abgekürzt. Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Das Skalarprodukt ist definiert durch $xy = x_i y_i - x_0 y_0$. Über gleiche Indizes ist zu summieren. Das Faltungsprodukt wird mit Stern

$$F(x) * G(x) = G(x) * F(x) = \int F(x-x') G(x') d^4 x',$$

die Heaviside-Funktion mit $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ abgekürzt. Ferner

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \quad d^4 x = d^3 x dx_0 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0.$$

I. Geometrie der elementaren Unschärfe

a) Geometrie der Wellenfunktionen

Als Basis der Darstellung wählen wir die kontinuierliche Raum-Zeit x . Zustände werden daher durch Wellenfunktionen $\psi_\lambda(x)$, kurz $\psi(x)$ beschrieben. Falls $\psi(x)$ die Wellenfunktion eines Teilchens

¹⁵ L. Schwartz, Theorie des distributions I, II. Verlag Hermann & Cie Paris 1950, 51.

ist, so ist z. B. $|\psi(x)|^2$ proportional der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an der Stelle x anzutreffen. Durch die Wellenfunktionen, ihre Verknüpfung mit anderen Ortsfunktionen (z. B. im Produkt), Feldgleichungen und Grenzbedingungen wird daher die Geometrie des physikalischen Systems beschrieben. $\psi_1(x)\psi_2(x)$ in einem Wechselwirkungsterm bedeutet die punktförmige Überlagerung der Felder, denn zur Stelle x tragen nur die Feldwerte an dieser Stelle bei. Man sieht dies formal am besten, wenn man das Produkt mit Hilfe der δ -Funktion schreibt

$$\psi_1(x)\psi_2(x) = \int \psi_1(x)\delta(x-x')\psi_2(x')dx',$$

oder in symmetrischer Form

$$\psi_1(x)\psi_2(x) = \iint \psi_1(x')\delta(x-x')\delta(x-x'')\psi_2(x'')dx'dx''.$$

Dies setzt gedanklich eine beliebig genaue Lokalisierbarkeit der Felder voraus. Wollen wir diese Lokalisierbarkeit aufgeben, so haben wir das Produkt etwa durch

$$\psi_1(x) \circ \psi_2(x) = \iint \psi_1(x')W(x-x', x-x'')\psi_2(x'')dx'dx'' \quad (3)$$

zu ersetzen. Die Korrelationsfunktion W drückt dabei das Maß der Nichtlokalisierbarkeit aus. Zur Begründung dient folgende Überlegung: Wir benötigen Funktionswerte an drei Stellen, x' und x'' für die Felder, die wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung überlagern und x für die Stelle, der wir das verallgemeinerte Produkt (\circ) zuordnen. In W treten nur Differenzen von Koordinaten auf, da W keine Stelle auszeichnen soll. Durch (3) wird erreicht, daß zur Stelle x die Feldwerte einer Umgebung von x beitragen, die Wechselwirkung daher verschmiert wird. Falls die Funktionen in den in Frage kommenden Umgebungen stetig sind, so wird das Ergebnis nicht so sehr von der analytischen Form der Funktion W , als von einer die mittlere Ausdehnung dieser Umgebung kennzeichnenden Konstanten l_0 abhängen. Diese Konstante l_0 entspricht dabei dem „Abschneideradius“ in regularisierten Theorien.

Wir können einen Ausdruck der Form (3) aus dem gewöhnlichen Produkt der Wellenfunktionen erhalten, indem wir dieses einer (nicht notwendig umkehrbaren) Funktionaltransformation unterwerfen. Es ist dies zunächst nur eine mathematische Umformung. Sie bietet jedoch ein Hilfsmittel, um eine nichtlokale Theorie in enger Anlehnung an die bekannte (und im großen und ganzen sicher richtige)

Quantentheorie zu formulieren. Dabei bleibt, wenn wir das gewöhnliche Produkt durch das \circ -Produkt (3) ersetzen, die formale algebraische Struktur der Theorie erhalten, während sich ihr Inhalt ändert.

Der allgemeinste Ansatz (unter Zulassung singulärer Operatoren) für eine solche Funktionaltransformation ist

$$\underline{\psi}(x) = \int K(x, x')\psi(x')dx'. \quad (4)$$

Wir können ihn wahlweise interpretieren als die Einführung eines neuen Basisraumes $x' \rightarrow x$ oder die Einführung einer neuen Funktion ψ . Da wir in den transformierten Funktionen $\underline{\psi}$ eine physikalische Theorie formulieren wollen, die sich nur in Raum-Zeit-Bereichen einer mittleren Ausdehnung l_0 (der Größenordnung 10^{-13} cm etwa, also Compton-Wellenlänge eines Mesons oder klassischer „Elektronenradius“) von der üblichen Theorie unterscheidet, so darf $K(x, x')$ nur in einer Umgebung der Stelle $x = x'$ mit der mittleren Ausdehnung l_0 wesentlich von Null verschiedene Werte annehmen und muß mit $l_0 \rightarrow 0$ in die δ -Funktion übergehen. Ferner soll kein Raum-Zeit-Punkt und kein Koordinatensystem ausgezeichnet werden. Dies bedeutet, daß K mit den Operatoren der infinitesimalen Translation, Drehung und Lorentz-Transformation vertauschbar sein muß. $K(x, x')$ darf daher nur (wie im Anhang gezeigt) von dem Viererabstand $(x - x')^2$ abhängen

$$K(x, x') = G[(x - x')^2] \quad (5) \quad \text{und aus (4) wird}$$

$$\underline{\psi}(x) = G(x^2) * \psi(x) = \int G[(x - x')^2]\psi(x')dx', \quad (6)$$

also die „Faltung“ von G mit ψ .

G ist konstant auf dem „Lichtkegel“ $x^2 = 0$ und den Hyperboloiden $x^2 > 0$ des raumartigen und $x^2 < 0$ des zeitartigen Bereichs. Um Wirkungen auszuschließen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten, nehmen wir G nur im zeitartigen Bereich von Null verschieden an, schneiden also am Lichtkegel ab. Diese Voraussetzung ist allerdings nicht notwendig.

Ohne voraussichtlich wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit können wir $G(x^2)$ durch ein Fourier-Integral

$$G(x^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(k^2)e^{ikx}\theta(-k^2)d^4k \quad (7)$$

mit $k(0) = 1$

darstellen. Man sieht unmittelbar, daß der Integrand nur von $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2$ abhängt. Wie im Anhang näher ausgeführt, erreichen wir

durch die Abschneidung am Nullkegel und Nullsetzen des Integranden im raumartigen Bereich

$$\left[\theta(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases} \right],$$

daß die Ortsfunktion $G(x^2)$ ebenfalls nur im Inneren des zeitartigen Bereichs von 0 verschieden ist. Hinzu tritt bei der Ortsfunktion ein singulärer Bestandteil der Form $\text{sgn } x_0 \delta(x^2)$, der jedoch keine Schwierigkeiten mit sich bringt. Durch seine Hinzunahme konvergiert das Integral $\int G(x^2) d^4x$ und wird wegen $g(0) = 1$ ebenfalls gleich 1. Der singuläre Anteil zieht den sonst bei der Ortsintegration auftretenden divergenten Ausdruck ab, der von der Oberfläche des Lichtkegels herrührt.

Wenden wir die durch (7) definierte Transformation auf eine Ortsfunktion an, so erhalten wir allgemein

$$\underline{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(k^2) \theta(-k^2) \tilde{\psi}(k) e^{ikx} d^4k, \quad (8)$$

falls wir $\psi(x)$ durch das Fourier-Integral

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{\psi}(k) e^{ikx} d^4k \quad (9)$$

darstellen. (8) beruht auf dem bekannten Satz der Fourier-Transformation, daß Faltung im Oberraum der Produktbildung im Unterraum entspricht.

Ebenso läßt sich formal die Umkehrung von (8) angeben

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{g(k^2)} \theta(-k^2) \tilde{\psi}(k) e^{ikx} d^4k. \quad (10)$$

Man würde formal zunächst den Ausdruck

$$\frac{1}{g(k^2)} \cdot \frac{1}{\theta(-k^2)}$$

erwarten, einen mathematisch sinnlosen Ausdruck (Nulldivision). Die Division in (10) ist jedoch im Sinne der Distributionstheorie vorzunehmen. $g(k^2) \theta(-k^2)$ ist eine Distribution mit dem Träger $-k^2 > 0$. Die Division ist eine Operation lokalen Charakters, daher hier nur für $-k^2 > 0$ definiert. Dort ist die reziproke Funktion $1/g(k^2)$. Der Träger ist wieder $-k^2 > 0$, daher die in (10) verwandte Schreibweise. $\theta(-k^2)$ ist keine Funktion, sondern stellt symbolisch eine Aussage über den Träger dar. Während jedoch nach Voraussetzung $g(k^2)$ ein konvergenzerzeugender Faktor ist, erzeugt $1/g$ möglicherweise Divergenz. (10) definiert eine Funktion $\psi(x)$ aus dem Hilbert-Raum, falls das Integral $\int |1/g(k^2)|^2 |\tilde{\psi}(k)|^2 dk$ konvergiert¹⁶, es de-

finiert eine Distribution, falls $\tilde{\psi}(k)/g(k^2)$ im Unendlichen nicht stärker als eine Potenz von $|k|$ wächst. Bei der von uns später diskutierten Transformationsfunktion $g = \exp(l_0^2 k^2/2)$ ist dies i. a. nicht erfüllbar, die Umkehrtransformation (10) daher nicht definiert.

b) Wechselwirkungsterme beschränkter Lokalisierbarkeit

Da wir die Transformation auf die bekannten Feldgleichungen der Quantenmechanik anwenden wollen, betrachten wir beispielsweise die Dirac-Gleichung des Elektrons im elektromagnetischen Felde

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \kappa_0 \right) \psi(x) = \frac{ie}{\hbar c} \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x). \quad (11)$$

Wir haben die Spinorindizes weggelassen, γ_μ bedeutet die Dirac-Matrizen, $\kappa_0 = mc/\hbar$, A_μ die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials.

Wir versuchen nun, diese Gleichung auf eine Wellengleichung für die mit G transformierten Wellenfunktionen umzuformen, um deren Lösungen zu ermitteln. Sei

$$G * A_\mu = \underline{A}_\mu(x), \quad G * \psi = \underline{\psi}(x), \quad (12)$$

dann erhalten wir durch Faltung der Gleichung (11) mit G

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \kappa_0 \right) \underline{\psi} = \frac{ie}{\hbar c} \gamma_\mu G * [A_\mu(x) \psi(x)], \quad (13)$$

da der auf der linken Seite von (11) stehende Differentialausdruck mit G vertauschbar ist.

Mit Hilfe der Fourier-Transformation können wir den rechts stehenden Wechselwirkungsterm auf die transformierten Funktionen umformen und erhalten das verallgemeinerte Produkt (3). Sei

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{A}(k) e^{ikx} dk$$

$$\text{und } \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{\psi}(k') e^{ik'x} dk',$$

dann ist

$$A_\mu(x) \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint \tilde{A}_\mu(k) \tilde{\psi}(k') e^{i(k+k')x} dk dk' \quad (14)$$

$$\text{und } G * [A_\mu(x) \psi(x)] = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint g[(k+k')^2] \tilde{A}_\mu(k) \tilde{\psi}(k') e^{i(k+k')x} dk dk'. \quad (15)$$

Andererseits ist

$$G * A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(k^2) \tilde{A}_\mu(k) e^{ikx} dk$$

$$\text{und } G * \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(k'^2) \tilde{\psi}(k') e^{ik'x} dk'. \quad (16)$$

¹⁶ G. Doetsch, Math. Z. 41, 283 [1936].

Wir haben den Faktor $\theta(-k^2)$ der Kürze halber weggelassen und denken ihn in die Definition von g aufgenommen. Er besagt: k, k' sowie $k+k'$ müssen zeitartige Vektoren sein.

Wir können daher statt (15) schreiben

$$G * (A_\mu(x) \psi(x)) = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint \frac{g[(k+k')^2]}{g(k^2)g(k'^2)} \tilde{A}_\mu(k) \tilde{\psi}(k') e^{i(k+k')x} dk dk', \quad (17)$$

wenn wir $g(k^2) \tilde{A}_\mu(k) = \tilde{A}_\mu(k)$ und $g(k'^2) \tilde{\psi}(k') = \tilde{\psi}(k')$ setzen.

Gl. (17) ist identisch mit (3), wenn wir

$$W(x', x'') = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint w(k, k') e^{i(kx' + k'x'')} dk dk' \quad (18)$$

$$\text{mit } w(k, k') = \frac{g[(k+k')^2]}{g(k^2)g(k'^2)} \text{ annehmen.} \quad (19)$$

W ist dabei im Ortsraum entweder eine Funktion oder eine Distribution, je nach der Wahl von g .

Man könnte nun für g versuchen, die üblichen von Bopp, Feynman u. a. verwendeten Regularisierungsfunktionen zu verwenden, z. B.

$$g(k^2) = 1/(k^2 + \lambda^2). \quad (20)$$

Damit erhält man für $w(k, k')$

$$w(k, k') = \frac{(k^2 + \lambda^2)(k'^2 + \lambda^2)}{(k+k')^2 + \lambda^2}, \quad (21)$$

einen Ausdruck, dessen Oberfunktion $W(x, x')$ eine Distribution ist.

Bei der Betrachtung von Gl. (16) und der Ableitung von (17) drängt sich jedoch eine andere Wahl von g zunächst auf, die eine bemerkenswerte physikalische Interpretation zuläßt, aber auch andererseits wesentliche mathematische Schwierigkeiten mit sich bringt. Da das Grundsätzliche der Diskussion für alle Funktionen g gleich ist, wollen wir uns im folgenden auf die spezielle Funktion $g = \exp(l_0^2 k^2/2)$ beziehen, ohne dabei zu übersehen, daß eine andere Wahl der Funktion im Hinblick auf den Vergleich mit dem Experiment sinnvoll und notwendig sein kann.

Es ist $g[(k+k')^2] = g(k^2 + k'^2 + 2kk')$. Da wir zur Bildung der transformierten Funktionen $g(k^2)$ und $g(k'^2)$ benötigen, so erhalten wir die einfachste Zerlegung, wenn g die Funktionalgleichung $g(a+b) = g(a)g(b)$ erfüllt. Die stetigen Lösungen dieser Gleichung sind $g(u) = C \exp(ru)$ (C, r Kon-

stanten). Wegen $g(0) = 1$ nehmen wir daher unter Einführung einer noch zu bestimmenden Konstanten l_0 der Dimension einer Länge für G die folgende Form an

$$G(x^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(l_0^2 k^2/2) \theta(-k^2) e^{ikx} d^4k. \quad (22)$$

Das $+$ -Zeichen ist wegen des Konvergenzverhaltens notwendig. Die durch (22) definierte Funktion ist im wesentlichen (in anderem Zusammenhange) von Born¹⁷, Pais und Uhlenbeck¹⁸ und Peierls und Mc Manus¹⁹ u. a. als Regularisierungsfunktion diskutiert worden.

Mit der Transformationsfunktion (22) erhalten wir aus (17)

$$\begin{aligned} G * [A_\mu(x) \psi(x)] &= \frac{1}{(2\pi)^8} \iint \exp(l_0^2 k k') \tilde{A}_\mu(k) \cdot \tilde{\psi}(k') e^{i(k+k')x} dk dk' \\ &= \iint W(x-x', x-x'') \cdot \tilde{A}_\mu(x') \psi(x'') d^4x' d^4x'' \quad (23) \end{aligned}$$

$$\text{mit } W(x', x'') = \frac{1}{(2\pi)^8} \iint \exp(l_0^2 k' k'') \cdot e^{i(k'x' + k''x'')} d^4k' d^4k'' \quad (24)$$

und den Beschränkungen $k', k'', k' + k''$ zeitartig. Als wesentliche Schwierigkeit kommt jedoch hinzu, daß $k'k''$ für zeitartige k', k'' das Vorzeichen von $-k'_0 k''_0$ hat

$$k'k'' = k'_i k''_i - k'_0 k''_0 = -k'_0 k''_0 \left(1 - \frac{k'_i k''_i}{k'_0 k''_0}\right), \quad (25)$$

da die Klammer stets positiv ist. $\exp(l_0^2 k' k'')$ konvergiert daher nur solange, als k'_0 und k''_0 gleiches Vorzeichen haben, d. h. aus demselben Kegel des k -Raumes stammen. Wir dürfen daher mit W aus (24) nur positive Frequenzteile mit positiven, negative Frequenzteile mit negativen koppeln. Dies hat einschneidende Folgen. Es scheint jedoch im Rahmen des Feynmanschen Formalismus, d. h. einer explizit kausalen Theorie möglich zu sein, die Quantentheorie so zu formulieren, daß die Frequenzbedingung erfüllbar ist. Diese hier auftretende Schwierigkeit ist charakteristisch für die Exponentialfunktion und tritt bei Transformationsfunktionen z. B. vom Typ (20) nicht auf.

(24) läßt sich unter den angegebenen Beschränkungen als Ortsfunktion darstellen und erhält als konvergenzbestimmenden Faktor die Funktion

¹⁷ M. Born, Rev. Mod. Physics **21**, 463 [1949].

¹⁸ A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **79**, 145 [1950].

¹⁹ H. Mc Manus, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A, **195**, 323 [1948].

$$W(x - x', x - x'') \sim \exp \left[\frac{1}{l_0^2} (x - x') (x - x'') \right]. \quad (26)$$

Hier erhalten wir daher nur dann Konvergenz, wenn wir uns darauf beschränken, daß vom Bezugspunkt x aus gerechnet, die Punkte x' und x'' jeweils im Inneren desselben Kegelraums liegen, d. h. entweder beide in der Vergangenheit, oder beide in der Zukunft. Dies scheint eine sinnvolle Einschränkung zu sein, denn hierdurch wird erreicht, daß die Koppelungsfunktion eine Verschmierung der Felder in rein retardierter oder rein avancierter Form vornimmt, die Theorie daher kausal bleibt. Zusammenfassend erhalten wir z. B. für die Dirac-Gl. (11) in den transformierten Funktionen

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \kappa_0 \right) \underline{\psi} = \frac{i e}{\hbar c} \gamma_\mu \frac{1}{(2\pi)^8} \iint \exp(l_0^2 k k') \cdot \tilde{A}_\mu(k) \tilde{\varphi}(k') e^{i(k+k')x} dk dk'. \quad (27)$$

Man sieht unmittelbar, daß die Transformation eines Produktes beliebig vieler Funktionen gleichen Argumentes ein analoges Resultat gibt, an Stelle von $\exp(l_0^2 k k')$ tritt hierbei $\exp[l_0^2(k k' + k k'' + \dots + k' k'' + \dots)]$, wenn k, k', k'', \dots die Impulskoordinaten (Variable der Fourier-Transformierten) der einzelnen Funktionen sind.

c) Zustände minimaler Unschärfe als Basis der Darstellung

Aus den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen für zwei kanonisch konjugierte Variable, z. B. x und p

$p_\mu x_\nu - x_\nu p_\mu = \delta_{\mu\nu} \hbar/i$, der Annahme von Wellenfunktionen und aus ihnen zu bildenden Erwartungswerten der Form

$\bar{M} = \int \psi^*(x) M \psi(x) dx$ (M = beliebiger Operator, ψ^* = zu ψ konjugiert komplexe Funktion), folgt (s. Heisenberg²⁰) für die Mittelwerte

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2}, \quad \overline{(\Delta p)^2} = \overline{(p - \bar{p})^2} \quad (28)$$

die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2} \geq \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2. \quad (29)$$

Wählt man eine sogenannte Schrödinger-Darstellung, in der die Zustände durch $\psi(x)$, die Ortskoordinaten und Impulse durch x bzw. $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ dar-

gestellt werden, so folgt als Bedingungsgleichung für einen Zustand $U(x)$, in dem das Minimum von (29) angenommen wird, (für eine Koordinate)

$$\frac{dU(x)}{dx} = \left[\frac{1}{\hbar a} (x - \bar{x}) + \frac{i \bar{p}}{\hbar} \right] U(x) \quad (30)$$

mit der beliebigen reellen Konstanten a . Die Integration ergibt

$$U(x) = N \exp \left(\frac{(x - \bar{x})^2}{2 a \hbar} + i \frac{\bar{p} x}{\hbar} \right). \quad (31)$$

Diese Wellenfunktion wird i. a. als sog. Wellenpaket minimaler Unschärfe gedeutet. Durch Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung zeigt man dann, daß diese Lösung mit der Zeit „zerfließt“, daher keine stabilen Zustände darstellt.

Wir versuchen eine andere Deutung: Die Fourier-Transformierte von (31) ist

$$\tilde{U}(K) = N_1 \exp[-iK\bar{x} - (\Delta_0 x)^2 K^2]. \quad (32)$$

Dabei ist $K = k - \bar{k}$, $\bar{k} = \bar{p}/\hbar$; $(\Delta_0 x)^2 = \hbar |a|/2$ die mittlere Unschärfe des Wellenpaketes. U wird daher durch das Integral

$$U(x) = N_1 \int \exp[iK(x - \bar{x}) - (\Delta_0 x)^2 K^2] dK \quad (33)$$

dargestellt. Die Verallgemeinerung auf vier Dimensionen ergibt dieselbe Gl. (33), wenn unter K , x wieder Vierervektoren verstanden werden. Der Integrand divergiert im Inneren des Nullkegels. Die reziproke Funktion

$$U^{-1}(x) = N_1 \int \exp[iK(x - \bar{x}) + (\Delta_0 x)^2 K^2] dK \quad (34)$$

konvergiert hingegen. U^{-1} ist reziprok bezüglich der Faltung, da mit der Normierung $N_1 = 1/(2\pi)^4$ gilt

$$\int U(x - x'') U^{-1}(x'' - x') dx'' = \delta(x - x'). \quad (35)$$

Dank dieser Eigenschaft können wir eine weitgehend beliebige Ortsfunktion

$$\psi(x) = \int \delta(x - x') \psi(x') dx'$$

darstellen durch

$$\psi(x) = \int U(x - x'') U^{-1}(x'' - x') dx'' \psi(x') \quad (36)$$

und (36) zerlegen in ein Paar reziproker Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) &= \int U^{-1}(x - x') \psi(x') dx', \\ \psi(x) &= \int U(x - x') \underline{\psi}(x') dx'. \end{aligned} \quad (37)$$

Von Konstanten abgesehen, ist dies genau der Zusammenhang, der sich in dem vorhergegangenen Abschnitt bei Wahl der speziellen Transformationsfunktion G nach Gl. (22) ergab.

Damit ergibt sich eine physikalische Deutungsmöglichkeit für G : U und U^{-1} sind die Wellenfunk-

²⁰ W. Heisenberg, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Verlag Hirzel Leipzig 1944.

tionen $\langle x | \bar{x} \rangle$ und $\langle \bar{x} | x \rangle$, die die Zustände minimaler Unschärfe $|\bar{x}\rangle$ mit dem Ortsraum verbinden. Die erste Gl. aus (37) gibt im Sinne der Transformationstheorie die Transformation einer Wellenfunktion $\psi(x)$ auf die Basis der Zustände minimaler Unschärfe mit dem Argument \bar{x} (Koordinatenerwartungswert). Diese Gl. stimmt mit (8) überein, falls wir für G den Ansatz (22) machen und $l_0 = \sqrt{2} \Delta_0 x$ setzen. Die Umkehrtransformation $U = G^{-1}$ gibt die Rücktransformation auf den Ortsraum, die nur in beschränktem Umfange wegen des Konvergenzverhaltens von U möglich ist.

d) Metrisierung des Phasenraumes

Im Zusammenhang mit der Reziprozitätstheorie von Born¹⁷ ergibt sich eine weitere Deutung, die formal mit der von Abschn. c äquivalent ist:

Die Transformationsfunktion $G = U^{-1}(x)$,

$$G = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp \left[i K (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} l_0^2 K^2 \right] dK$$

genügt, falls wir die Abweichungen von den Erwartungswerten als Koordinaten im Phasenraum einführen: $X = x - \bar{x}$, $K = k - \bar{k} = (1/\hbar) P$ der Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators in vier Dimensionen

$$\sum_{\mu} \left(X_{\mu}^2 - l_0^4 \frac{\partial^2}{\partial X_{\mu}^2} \right) G(X^2) = 4 l_0^2 G(X^2) \quad (38)$$

oder mit $P_{\mu} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial X_{\mu}^2}$ der Gl.

$$\sum_{\mu} \left(X_{\mu}^2 + \frac{l_0^4}{\hbar^2} P_{\mu}^2 \right) G(X^2) = -4 l_0^2 G(X^2). \quad (38a)$$

Diese Gleichung ist mit der von Born¹⁷ angegebenen Differentialgleichung der selbstreziproken Funktionen identisch.

Für die Erwartungswerte gilt

$$\overline{(x - \bar{x})^2} + \overline{(p - \bar{p})^2} = -4 l_0^2.$$

Dies ist identisch mit dem Minimumsprinzip des Abschn. c, da auch hier das Minimum der Unschärfe angenommen wird. Der Grund dafür ist, daß Gl. (38) durch Iteration aus den Differentialgleichungen für U und U^{-1} entsteht, daher beide zu Lösungen hat. Wir können diese in den Variablen X, P umschreiben:

$$\left(X - i \frac{l_0^2}{\hbar} P \right) U = 0, \quad \left(X + i \frac{l_0^2}{\hbar} P \right) U^{-1} = 0.$$

Durch Produktbildung wird hieraus

$$(X + i l_0^2 P / \hbar) (X - i l_0^2 P / \hbar) = \left[X^2 + l_0^4 P^2 / \hbar^2 + i \frac{l_0^2}{\hbar} (PX - XP) \right], \quad (39)$$

was wegen $PX - XP = \hbar/i$ mit Gl. (38) übereinstimmt, geschrieben für eine Koordinate. U und U^{-1} sind also Linearfaktoren der Bornschen Differentialgleichung, und l_0 ist die mittlere Unschärfe im Phasenraum.

Gl. (38) definiert eine Metrik im 8-dimensionalen Phasenraum in der Umgebung der Stelle $x = \bar{x}$, $p = \bar{p}$. $G = U^{-1}$ hat die zeitartige Umgebung, $G^{-1} = U$ die raumartige als Konvergenzgebiet. Lokalisierbar sind nur die Erwartungswerte \bar{x} und \bar{p} von Koordinaten und Impulsen. Die Teilchen (Felder) oszillieren gemäß der aus G oder G^{-1} folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung um diese Mittelwerte. Daher müssen wir für ihre Wechselwirkung auch ein verallgemeinertes Produkt Gl. (3) in den Wellengleichungen verwenden.

Die in den vorangegangenen Abschnitten versuchte Deutung der speziellen Transformation G aus Gl. (22) scheint eine Stütze für diese Annahme zu sein, ungeachtet der durch sie verursachten mathematischen Schwierigkeiten. Zunächst soll jedoch untersucht werden, wie weit sich allgemeine Aussagen über die Feldtheorie machen lassen, ohne die Transformation G zu spezialisieren.

II. Feldtheorie der transformierten Funktionen

a) Wellengleichungen

Wir waren in I. davon ausgegangen, daß sich die Wellengleichungen für die transformierten Feldfunktionen aus den ursprünglichen durch Transformation mit der Funktion G ergeben, wie dies z. B. in Gl. (27) zum Ausdruck kam. Es sei ganz allgemein angenommen: Ist $[\mathcal{L}(\psi)] = 0$ die Wellengleichung des ψ -Feldes, so ist $G * [\mathcal{L}(\psi)] = [\mathcal{L}(\psi)] = 0$ die Wellengleichung für die transformierten Funktionen. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit von l_0 ($\approx 10^{-13}$ cm) unterscheiden sich ψ und $\underline{\psi}$ nur in Abständen der Größenordnung des „Durchmessers“ eines Elementarteilchens. Für makroskopische Betrachtung sind sie daher ununterscheidbar, solange wir Vorgänge betrachten, die nicht wesentlich von der Struktur der Wellenfunktionen in kleinsten Bereichen abhängen. Grundsätzliche Unterschiede sind zu erwarten, wenn „virtuelle“ Prozesse mit

nicht begrenzter Energie auftreten (z. B. Emission und Reabsorption eines Lichtquants) oder wenn Energien der Größenordnung $\hbar c/l_0$ umgesetzt werden, wie dies bei Mesonenprozessen der Fall ist.

Fassen wir G als die Transformationsfunktion auf, die den Übergang vom Ortsraum auf den Raum minimaler Unschärfe mit Koordinatenerwartungswerten als Basiskoordinaten vermittelt, so bedeutet dies, daß ψ und $\underline{\psi}$ für alle Aussagen ununterscheidbar sind, in die die „innere Struktur“ der Teilchen nicht eingeht, für die wir daher die Teilchen als „punktförmig“ ansehen können.

Die Lösungen der Feldgleichungen sind jedoch nicht durch diese allein bestimmt, sondern werden aus der Mannigfaltigkeit der möglichen Lösungen durch Anfangs- und Randbedingungen sowie Stetigkeitsforderungen ausgewählt. Zwei Funktionen ψ_1 und $\underline{\psi}_1$ sind nur dann durch die G -Transformation verknüpft $\psi_1 = G * \underline{\psi}_1$, wenn wir nicht nur die Wellengleichung, sondern alle übrigen Bedingungen mittransformiert haben.

Eine vorgegebene experimentelle Fragestellung legt die Anfangs- und Randbedingungen des Systems i. a. fest. Es ist jedoch nicht a priori möglich, zu sagen, ob die vorgegebenen scharfen Rand- und Anfangsbedingungen für die ψ - oder die $\underline{\psi}$ -Funktionen vorzuschreiben sind. Falls sie durch die Transformation G „verschmiert“ werden, so müssen wir uns für eine der beiden Möglichkeiten entscheiden.

Schließt man sich der Deutung an, daß G den Übergang vom Ortsraum auf den Raum minimaler Unschärfe liefert, die $\underline{\psi}$ -Funktionen daher als Koordinaten die Erwartungswerte \bar{x} haben — (die sich im Teilchenbild als „Schwerpunkte“ deuten lassen) — so wird man die scharfen Rand- und Anfangsbedingungen für die $\underline{\psi}$ -Funktionen annehmen müssen. Damit haben wir jedoch eine Veränderung des physikalischen Schemas vorgenommen, denn die mit scharfen Bedingungen aus den transformierten Feldgleichungen erhaltenen Funktionen gehen aus den durch dieselben Bedingungen mit den ursprünglichen Gleichungen gewonnenen Funktionen nicht mehr durch die Transformation G hervor. Falls $G^{-1}\psi$ überhaupt einen Sinn hat, so definiert es eine andere Lösung von $[\mathcal{L}(\psi)] = 0$, die mit unscharfen Nebenbedingungen gewonnen wird.

Wir haben damit eine Methode gewonnen, eine konvergente Feldtheorie aus der üblichen (in großen Zügen sicher richtigen) Quantentheorie der Wellenfelder korrespondenzmäßig wie folgt abzuleiten:

Man transformiert die Feldgleichungen mit G und erhält neue Gleichungen für die transformierten Funktionen. Für diese werden die ursprünglichen Rand- und Nebenbedingungen verwendet.

b) Herleitung der transformierten Wellengleichungen aus einem Variationsprinzip

Die üblichen Wellengleichungen der Feldtheorie werden aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int L\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \dots\right) d^3x dx_0 = 0 \quad (40)$$

gewonnen, in dem $L = L\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \dots\right)$ die „Lagrange-Funktion“, eine Funktion der Feldfunktionen, ihrer ersten (und eventuell höheren) Ableitungen ist, die implizit durch diese Funktionen, aber auch u. U. direkt von den Koordinaten x_μ abhängt. Die Wellengleichung des ψ -Feldes erhält man als Eulersche Gleichung in bekannter Weise

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right) = 0 = [L(\psi)]. \quad (41)$$

Die mit G transformierte Gleichung erhalten wir, wenn wir statt (40) setzen

$$\delta \int G * L\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \dots\right) d^3x dx_0 = \delta \int \underline{L}(\psi, \dots) dx = 0 \quad (42)$$

und zunächst die Variation nach den ψ ausführen (da die $\underline{\psi}$ in \underline{L} in komplizierterer Weise vorkommen)

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right), \quad (43)$$

falls nur erste Ableitungen vorkommen. Da

$$\delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\delta \psi)$$

ist, so folgt $\delta \int G * L d^4x$

$$= \iint \left\{ G[x' - x]^2 \left[\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right] \delta \psi - \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (G[(x' - x)^2]) \delta \psi \right\} d^4x d^4x'$$

nach partieller Integration. Der ausintegrierte Bestandteil ist Null, da die Variation am Rande des Integrationsgebietes verschwindet. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G[(x' - x)^2] = - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} G[(x' - x)^2],$$

folglich verschwindet der Bestandteil

$$\int d^4 x' \frac{\partial}{\partial x'_\mu} G[(x' - x)^2] \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \delta \psi(x)$$

ebenfalls, da er sich in ein Integral über die Oberfläche des Raum-Zeit-Gebietes transformieren läßt, auf der der Integrand verschwindet. Es bleibt

$$\begin{aligned} \delta \int G * L d^4 x &= \int G * \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right) \delta \psi d^4 x \\ &= \int G * [\underline{\mathcal{Q}}(\psi)] \delta \psi d^4 x. \end{aligned} \quad (44)$$

Nun ist $G * \{[\underline{\mathcal{Q}}(\psi)] \cdot \delta \psi(x)\}$

$$\begin{aligned} &= \iint dx' dx'' [\underline{\mathcal{Q}}(\psi(x'))] \delta \psi(x'') W(x - x', x - x'') \\ &= \int dx' [\underline{\mathcal{Q}}(\psi(x'))] \delta \chi(x, x'), \text{ dabei ist } \delta \chi(x, x') \end{aligned}$$

ein willkürlicher Integraloperator. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int G * [\underline{\mathcal{Q}}(\psi)] \delta \psi dx &= 0 \\ &= \iint [\underline{\mathcal{Q}}(\psi(x'))] \delta \chi(x, x') dx dx' = 0 \\ &\equiv \int \delta \omega(x) [\underline{\mathcal{Q}}(\psi(x))] d^4 x = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

mit $\delta \omega(x) = \int \delta \chi(x', x) d^4 x'.$

$$\begin{aligned} \delta \int L \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) dx &= \int \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\delta \psi) \right) dx \\ &= \int \delta \psi \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right) dx + \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\delta \psi \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right) dx. \end{aligned}$$

Läßt man nun eine Variation von ψ auch auf dem Rande zu, jedoch unter der Nebenbedingung, daß ψ die Gl.

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} = 0 \text{ erfüllt, so ist}$$

$$\delta \int L d^4 x = \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\delta \psi \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right) d^4 x. \quad (47)$$

In gleicher Weise erhält man für die mit G transformierten Funktionen

Da $\delta \omega(x)$ ebenfalls eine willkürliche Funktion ist, so hat das Variationsproblem nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung als Eulersche Gl.

$$[\underline{\mathcal{Q}}(\psi)] = 0 \equiv G * [\underline{\mathcal{Q}}(\psi)], \quad (46)$$

also die mit G gefaltete Gleichung des ursprünglichen Problems.

c) Invarianzeigenschaften und Erhaltungssätze

Enthält die Lagrange-Funktion eines Variationsproblems eine Invarianzeigenschaft gegenüber einer Gruppe von kontinuierlichen Transformationen, so erhält man durch Anwendung der Sätze von Noether²¹ unmittelbar erste Integrale der Eulerschen Gleichung. Diesen Vorintegralen entsprechen in der zugehörigen physikalischen Theorie Erhaltungssätze.

So ergeben bekanntlich die Forderungen der Translations- und Drehinvarianz in vier Dimensionen den Energie-Impulssatz, den Drehimpulssatz und den relativistischen Schwerpunktssatz. Haben wir eine Lagrange-Funktion vorgegeben, so werden physikalische Größen, wie Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung usw. daher durch die Invarianzsätze definiert. Man geht am einfachsten wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \delta \int G * L dx &= \int \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left(G[(x - x')^2] \delta \psi(x') \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} \right)} \right) dx dx' \\ &= \int G * \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left(\delta \psi \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} \right)} \right) dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Wir erhalten daher gerade die mit G transformierten üblichen Ausdrücke.

Da nach Voraussetzung G mit den infinitesimalen Transformationen von Translation und Drehung im R_4 vertauschbar und reell ist, und nicht auf die Indizes von Feldfunktionen operiert, so bleiben bei der G -Transformation sämtliche erforderlichen In-

²¹ E. Noether, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl. Fachgr. I, 1918, 235—257.

varianzeigenschaften erhalten, während die Erhaltungssätze (und die durch sie definierten Feldgrößen) durch die G -Transformation aus den ursprünglichen hervorgehen.

Gerade diese Eigenschaft ist für die innere Konsistenz der Theorie notwendig. Wenn wir z. B. die Wellengleichung des elektromagnetischen Viererpotentials transformieren

$$G * \square A_\mu(x) = \square \underline{A}_\mu(x) \\ = -\frac{1}{c} G * j_\mu(x) = -\frac{1}{c} \underline{j}_\mu(x), \quad (49)$$

so erhalten wir auf der rechten Seite den richtigen transformierten Strom, z. B. in der Diracschen Theorie

$$\underline{j}_\mu(x) = i e c G * (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) = i e c \bar{\underline{\psi}} \circ \gamma_\mu \underline{\psi}. \quad (50)$$

Von dem Ersatz des gewöhnlichen Produktes durch die Verallgemeinerung Gl. (3) abgesehen, bleiben in den transformierten Feldgrößen die Gleichungen ihrer formalen Struktur — und damit ihrer physikalischen Deutbarkeit — nach erhalten. Nur können wir jetzt eine konvergente Theorie bekommen.

d) Greensche Funktionen der Wellengleichungen

Man kann die üblichen Wellengleichungen stets in die Wellengleichung des „freien Feldes“ und den Wechselwirkungsteil zerlegen. Die Wellengleichung des freien Feldes ist mathematisch dadurch charakterisiert, daß sie in der Feldfunktion und ihren Ableitungen linear und nur konstante Koeffizienten enthält. Man kann dann den zugehörigen Operator stets als einen Integralkern vom Faltungstyp schreiben, z. B.

$$\square \psi(x) = \square \int \delta(x - x') \psi(x') dx' = \square \delta * \psi.$$

Als Elementarlösung der Gleichung des freien Feldes bezeichnet man einen zum Wellengleichungsoperator bezüglich der Faltung reziproken Integraloperator. Ist z. B. die Feldgleichung gegeben durch

$$\int K(x - x') \psi(x') dx' = \text{Wechselwirkungsterm}, \quad (51)$$

so ist die Gleichung des freien Feldes

$$K * \psi \equiv \int K(x - x') \psi(x') dx' = 0. \quad (51a)$$

Elementarlösung ist ein Operator K^{-1} mit der Eigenschaft

$$K * K^{-1} = K^{-1} * K = \delta. \quad (52)$$

Es gibt i. a. unendlich viele Elementarlösungen, die Differenz zweier Elementarlösungen ist eine Lösung der homogenen Gleichung, also eine Lösung der Gleichung des freien Feldes.

Als Greensche Funktion bezeichnet man eine spezielle Elementarlösung, die die Anfangs- und Randbedingungen befriedigt. Man erhält sie aus einer beliebigen Elementarlösung durch Addition einer geeigneten Lösung der homogenen Gleichung.

Da K^{-1} durch eine Gleichung vom Faltungstyp definiert ist, so erhält man unter sehr allgemeinen Konvergenzbedingungen stets eine Elementarlösung mit Hilfe der Fourier-Transformation, die die Faltung in das Produkt der Fourier-Transformierten überführt. Aus der erhaltenen Fourier-Darstellung von K^{-1} lassen sich neue Lösungen durch Änderung des Integrationsweges in bekannter Weise erhalten. Man erhält auf diesem Wege die bekannten Schwingerschen und Feynmanschen invarianten Funktionen, mit deren Hilfe sich die Lösungen der Feldgleichungen in beliebiger Näherung durch Iteration ermitteln lassen.

Bei der Ermittlung der Funktionen K^{-1} durch die Fourier-Transformation ist eine Division nötig. Hierbei ist nach Schwartz¹⁵ Vorsicht am Platze. Die durch Division gewonnene Formel gilt nur dann allgemein, wenn man sich der von Schwartz eingeführten Begriffsbildung der „Pseudofunktion“ bedient, die eine Vorschrift zur Behandlung eventuell auftretender (durch Pole des Integranden) divergierender Integrale enthält. Divergente Integrale dieser Art treten bei der Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen häufig auf. Hadamard hat zu ihrer Behandlung „endliche Anteile“ (*parties finies*) von divergenten Integralen definiert, die hier mit den Schwartzschen Pseudofunktionen übereinstimmen. Divergenzen dieser Art sind in der Physik unter dem Namen „Ultrarotkatastrophe“ bekannt, weil sie ein scheinbares Divergieren der Lösungen für kleine Impulse = lange Wellenlängen mit sich bringen. Wir können hierauf an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Als wesentliches Ergebnis wollen wir festhalten:

Die Feldgleichungen der Quantentheorie lassen sich in die Gleichungen der freien Felder („linke Seite“) und Wechselwirkungsterme („rechte Seite“) zerlegen. Die linke Seite ist vom Faltungstyp, folglich mit der Transformation G vertauschbar. Das bedeutet, daß die linke Seite der Gleichungen für die transformierten Funktionen ihre Form beibehält. Da wir weiterhin angenommen haben, daß die

Randbedingungen in der ursprünglichen Form für die transformierten Funktionen gültig sein sollen, so erhalten wir als Greensche Funktionen der transformierten Feldgleichungen die unveränderten Greenschen Funktionen des vorgegebenen Problems. Es ändert sich daher nur die Form des Wechselwirkungsterms im Sinne einer Beschränkung der Lokalisierbarkeit.

Wir können daher alle bekannten invarianten Funktionen übernehmen und mit ihnen die kausale Struktur der Feldtheorie. Dies steht im Gegensatz zu den Regularisierungstheorien, in denen gerade die invarianten Funktionen regularisiert werden.

Damit ist grundsätzlich das Programm zur Formulierung der Feldtheorie fertig. Die rechnerische Ausführung stößt bei Verwendung der speziellen Strukturfunktion (22) wegen der bereits erwähnten Divergenz bei der Koppelung ungleichnamiger Frequenzteile auf Schwierigkeiten, die eine Neuformulierung des Störungsverfahrens nötig machen.

Anhang

1) Translations-, Drehungs- und Lorentz-Invarianz

Es muß gelten

$$\int K(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} \psi(x') dx' = \frac{\partial}{\partial x} \int K(x, x') \psi(x') dx',$$

oder $\frac{\partial}{\partial x} K(x, x') = -\frac{\partial}{\partial x'} K(x, x')$, falls K differenzierbar und im Unendlichen verschwindet. Hieraus folgt notwendig $K(x, x') = K(x - x')$.

Ebenso $\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) \int K(x - x') \psi(x') dx' = \int K(x - x') \left(x'_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - x'_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\mu}\right) \psi(x') dx'$. Dies ist der Fall, wenn (nach partieller Integration)

$$\int \left\{ (x_\mu - x'_\mu) \frac{\partial}{\partial x_\nu} - (x_\nu - x'_\nu) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} \cdot K(x - x') \psi(x') dx' = 0$$

ist, identisch in ψ , d. h. $\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) K(x) = 0$.

K darf daher nur vom Quadrat des Viererabstandes abhängen:

$$K(x) = G(x^2).$$

2) Fourier-Transformierte einer am Nullkegel abgeschnittenen symmetrischen Funktion $g(k^2 - k_0^2) \theta(k_0^2 - k^2)$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$kx = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3, k^2 = k_i k_i.$$

Dann ist

$$(2\pi)^4 G(x, x_0) = \int g(k^2 - k_0^2) e^{i(kx - k_0 x_0)} \theta(k_0^2 - k^2) d^3k dk_0$$

$$a) k_0 > 0: k_0 = \sqrt{k^2 + \lambda^2}, r = \sqrt{x^2}, K = \sqrt{k^2},$$

$$(2\pi)^4 G^+$$

$$= \int d^3k e^{ikx} \int_0^\infty g(-\lambda^2) e^{ix_0 \sqrt{k^2 + \lambda^2}} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \\ = -\frac{2\pi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKr} \frac{e^{ix_0 \sqrt{K^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{K^2 + \lambda^2}} dK.$$

$$b) k_0 < 0: k_0 = -\sqrt{k^2 + \lambda^2}$$

$$(2\pi)^4 G^- = \frac{2\pi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKr} \frac{e^{-ix_0 \sqrt{K^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{K^2 + \lambda^2}} dK.$$

Somit ($\text{sgn } x_0 = \text{Vorzeichen von } x_0$)

$$(2\pi)^4 G = -\frac{4\pi i \text{sgn } x_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKr} \frac{\sin |x_0| \sqrt{K^2 + \lambda^2}}{\sqrt{K^2 + \lambda^2}} dK.$$

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKr} \frac{\sin |x_0| \sqrt{K^2 + \lambda^2}}{\sqrt{K^2 + \lambda^2}} dK \\ = \pi \theta(x_0^2 - r^2) J_0(\lambda \sqrt{x_0^2 - r^2}),$$

wo J_0 = Bessel-Funktion, und daher schließlich

$$(2\pi)^4 G = -\frac{4\pi^2 i}{r} \text{sgn } x_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \theta(x_0^2 - r^2) \right. \\ \left. \cdot \int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda J_0(\lambda \sqrt{x_0^2 - r^2}) \right\}.$$

Wegen $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \theta(x_0^2 - r^2) = -2\delta(x_0^2 - r^2)$, $J_0(0) = 1$

und falls $\int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda = 1$:

$$(2\pi)^4 G(r^2 - x_0^2) = -\frac{4\pi^2 i}{r} \theta(x_0^2 - r^2) \text{sgn } x_0 \\ \cdot \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty g(-\lambda^2) \lambda d\lambda J_0(\lambda \sqrt{x_0^2 - r^2}) \\ + 8\pi^2 i \text{sgn } x_0 \delta(x_0^2 - r^2).$$

Wegen des Faktors $\theta(x_0^2 - r^2)$, $\theta(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$ ist daher die Ortsfunktion G auf den zeitartigen Bereich beschränkt und am Lichtkegel abgeschnitten. Der singuläre Bestandteil $\text{sgn } x_0 \delta(x_0^2 - r^2)$ kommt notwendig hinzu und sorgt dafür, daß $G(x^2 - x_0^2)$ integrabel, bzw. quadratintegrabel wird. Ohne diesen Bestandteil divergiert das Integral über eine Funktion $\theta(x_0^2 - r^2) F(x_0^2 - r^2)$, da der Integrand auf dem Lichtkegel konstant ist, die Oberfläche des Lichtkegels aber unendlich groß ist. Der singuläre Anteil ist daher mathematisch notwendig, während er physikalisch ohne Bedeutung ist.

Setzen wir die spezielle Funktion Gl. (22) ein, $g(k^2 - k_0^2) = \exp[l_0^2(k^2 - k_0^2)/2]$, so erhalten wir durch Einsetzen in obige Gln. $G \sim \theta(x_0^2 - r^2) \exp[1/l_0^2(r^2 - x_0^2)] + \dots$, wobei die Berechnung des auftretenden Integrals über λ mit Hilfe einer Tabelle der Hankel-Transformation vorgenommen werden kann.

Herrn Prof. Dr. Fritz Bopp, München, bin ich für die Stellung des Themas, viele Anregungen und Diskussionen zu tiefem Dank verpflichtet. Dieser Dank sei auch der Universität von Californien in Berkeley USA abgestattet, die es mir durch ein einjähriges Studienstipendium ermöglichte, sowohl theoretische, wie vor allem auch die experimentellen Grundlagen der Elementarteilchenphysik kennenzulernen.

Zusatz b. d. Korr.: Bloch²² hat kürzlich einen allgemeinen Formalismus für Feldtheorien mit nicht-lokaler Wechselwirkung angegeben, der von einem ver-

schiedenen Ausgangspunkt zu ähnlichen Feldgleichungen führt. Kristensen und Möller²³ haben diese Theorie unter Verwendung der Störungstheorie von Yang-Feldman²⁴ und Källén²⁵ auf die Mesonentheorie angewandt. Ihre Methode und die auftretenden Schwierigkeiten gelten sinngemäß auch für die vorliegende Theorie.

Ferner hat Güttinger²⁶ gezeigt, daß die konsequente Verwendung des Pseudofunktionsbegriffs von Schwartz in der quantenfeldtheoretischen Störungsrechnung an Stelle von Divergenzen unbestimmte Parameter und willkürliche Funktionen einführt, deren Bestimmung äquivalent mit Renormalisierung und Regularisierung ist. Die Parameter bzw. willkürlichen Funktionen, lassen sich jedoch nicht vollständig aus den Invarianzforderungen der Theorie bestimmen, so daß an Stelle einer divergenten eine unbestimmte Quantentheorie tritt, die in gleicher Weise eine Abänderung der Grundlagen notwendig erscheinen läßt. Güttinger zeigt, daß Produkte singulärer Funktionen mit zusammenfallenden Singularitäten in der Distributionstheorie definierbar sind, jedoch in unendlich vieldeutiger Weise. Eindeutigkeit läßt sich daher nur erzielen, wenn man entweder durch eine nichtlokale Feldtheorie das Zusammenfallen von Singularitäten verhindert, oder zusätzliche Bedingungen in die Theorie einführt, welche die Willkür beseitigen.

²² C. Bloch, Dan. Rat. Fys. Medd. **27**, Nr. 8 [1952].

²³ P. Kristensen u. C. Möller, Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, Nr. 7 [1952].

²⁴ C. N. Yang u. D. Feldman, Physic. Rev. **76**, 972 [1950].

²⁵ G. Källén, Ark. Fysik **2**, 371 [1951].

²⁶ W. Güttinger, Physic. Rev. **89**, 1004 [1953].